Teoretická část - 15.2.2021

1. (a) Definujte spojitost na intervalu (1 bod).

   (b) Zformulujte:
   - Rolleovu větu,
   - Lagrangeovu větu o střední hodnotě,
   - Cauchyovu větu o střední hodnotě

   (3 body).

   (c) Lagrangeovu větu o střední hodnotě dokažte (1 bod).

   (d) Dokažte (například pomocí výše uvedených vět) následující:

      i. existuje $\xi > 0$, že $e^{\xi} = \dfrac{4(e-1)}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+\xi^2}$,

      ii. $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

      iii. nechť f je spojitá na $\mathbb{R}$ a f' existuje na $\mathbb{R}$. Pokud existuje posloupnost $\{a_n\}$, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ a $f(a_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, potom existuje posloupnost $\{b_n\}$, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ $\lim\limits_{n\to\infty} f'(b_n)$=0.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

2. (a) Definujte pojmy $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$ a $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$ (3 body).

   (b) Nechť f, g, h, ψ, ϕ jsou definovány na okolí bodu a a splňují

   - $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$,
   - $\psi(x) \sim \phi(x)$, $x \to a$.

   Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   i. je-li $h(x) = O(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x)+h(x) \sim g(x)$, $x \to a$,

   ii. je-li $h(x) = o(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x) + h(x) \sim g(x)$, $x \to a$,

   iii. $f(x) + \psi(x) \sim g(x) + \phi(x)$, $x \to a$,

   iv. $f(x) \cdot \psi(x) \sim g(x) \cdot \phi(x)$, $x \to a$,

   v. je-li $\theta(x) = a + x^4$, $x \in \mathbb{R}$, a $h(x) = O(g(x))$, $x \to a$, potom $h \circ \theta(x) = O(g \circ \theta(x))$, $x \to 0$.

   vi. je-li $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$, potom $\psi \circ h(x) \sim \phi \circ h(x)$, $x \to b$.

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).

3. (a) Definujte dolní a horní součty a Riemannův integrál (2 body).
   (b) Zformulujte větu o vlastnostech dělení (1 bod).
   (c) Zformulujte a dokažte větu o nutné a postačující podmínce existence Riemannova integrálu ($2,5$ bodu).
   (d) Mějme funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení:
      i. nechť $f, g \in \mathfrak{R}([-5, -3])$, potom $f + 3g \in \mathfrak{R}([-5, -3])$,
      ii. nechť $f \in \mathfrak{R}([-5, -3])$ a $g = f$ na $[-5, -3)$, potom $g \in \mathfrak{R}([-5, -3])$.

   Vše řádně zdůvodněte ($2,5$ bodu).